

جامعة الكويت
كلية العلوم
قسم الرياضيات
المادة : ساعة ونصف
الدرجة : (١٠٠) درجة
الاسم : د. محمد شفيق حسن
المعتمدين الفصل الأول ٢٠١٧-٢٠١٨
أسئلة مقرر التحليل الحقيقي (٢)
طلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

السؤال الأول (١٥) درجة

ثبت أن كل مجموعة محدودة $E \subset \mathbb{R}$ شبه متراسة (في حالة كان E يحتوي على).

السؤال الثاني (١٥) درجة

ليكن $A, B \rightarrow B$ مؤثر خطي ومتراس من فضاء متناهي من بعد n حيث n زوجي. فثبت أن نصف قطر الخطي يساوي
بالمتكافؤ : $\rho(A) = \sqrt{\lambda_1(A)}$

السؤال الثالث (١٥+١٥+٢٥) درجة

١- ثبت أنه إذا كان الفضاء الخطي المنتظم X متراساً فإنه يكون متناوياً وفضولاً.
٢- ليكن $A: B \rightarrow B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء متناهي من بعد n فثبت أن $\sigma(A) = 0$.

السؤال الرابع (٢٠) درجة

لكن متتالية المتوثرات (A_n) حيث $A_n: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ المعطاة بمتكافؤ :

$$A_n(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, 0, \dots)$$

ثبت أن هذه المتتالية متراسة ، ولكي يبينها A_n \sqrt{n} مؤثر غير متراس. هل مؤثر القيمة مع
بكر التحليل هو : مؤثر بسيط أو مؤثر موجب أو مؤثر انزوي أو متراس.

السؤال الخامس (١٥+١٥+٢٥) درجة

١- ليكن $A: B \rightarrow B$ مؤثر خطي ومحدود من فضاء متناهي من بعد n فثبت أنه إذا كان A^{-1} موجوداً

$$\text{ينتمي إلى } L(B, B) \text{ فنستنتج } \left\{ \frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(A) \right\} = \sigma(A^{-1}).$$

٢- عرف ما يلي : نظيم هانوت لمتوثر A - تنقي الخطية المحدود .

مدرس المقرر

الكلية الأسطة

المعتمدين

مع التمنيات بالنجاح والعزق

حسب ١٦ / ١١ / ٢٠١٨ م

(في حال كان E حقيقي) : بما أن E^n فضاء خطي ذو n بعد فتوجد قاعدة مكونة من n عنصر وهي u_1, u_2, \dots, u_n وبالتالي $\forall u \in E^n$ فإنه توجد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$ بحيث

(2) $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$ ويكون $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ، وبالتالي من أجل أي عنصر

نأخذ التطبيق : $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \in E^n$ يوجد $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$

$\varphi: E^n \rightarrow R^n : u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \mapsto \varphi(u) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$

ف نجد أن هذا التطبيق :

معرف تماماً : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$

بحيث $u = v$ فإن $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$ وبالمطابقة نجد أن $x_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n$ وبالتالي $\varphi(u) = \varphi(v)$ أي أن $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

تحقق الاقتضاء : $u = v \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(v)$ فالتطبيق φ معرف تماماً .

خطي : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ ومهما

يكن $\lambda, \mu \in R$ فإن :

(2) $\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi(\lambda x_1 u_1 + \lambda x_2 u_2 + \dots + \lambda x_n u_n + \mu y_1 u_1 + \mu y_2 u_2 + \dots + \mu y_n u_n) \Rightarrow$

$\varphi(\lambda u + \mu v) = \varphi\{(\lambda x_1 + \mu y_1)u_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2)u_2 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n)u_n\} \Rightarrow$

$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \Rightarrow$

$\varphi(\lambda u + \mu v) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) + (\mu y_1, \mu y_2, \dots, \mu y_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$

فالتطبيق خطي أي أن $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$

(2) يحافظ على النورم : لأن $\|u\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_{R^n} = \|\varphi(u)\|_{R^n}$

متباين : لأنه مهما يكن $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n, v = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \in E^n$ بحيث

٢) $x_i = y_i$, $i=1,2,\dots,n$ وبالتالي $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ فإن $\varphi(u) = \varphi(v)$ وبالتالي تحقق الاقتضاء : $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n$ وبالتالي $\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u = v$ فالتطبيق φ متباين .

غامر : من أجل أي عنصر $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ يوجد عنصر $u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n \in E^n$ بحيث $\varphi(u) = x$. مما سبق نجد أن التطبيق φ إيزومورفيزم من E^n في R^n .

الآن ، لنكن $E^n \supset M$ مجموعة محدودة ولنثبت أنها شبه متراسة ، لنكن $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ متتالية من

عناصر M عندئذ يكون $u^N = \alpha_1^N u_1 + \alpha_2^N u_2 + \dots + \alpha_n^N u_n$ من أجل $N = 1, 2, \dots$ حيث

٢) $\alpha_j^N \in R$, $j = 1, 2, \dots, n$, $N = 1, 2, \dots$ وبما أن $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ عناصر من المجموعة المحدودة

M فإن $N = 1, 2, \dots$, $\|u^N\|_{E^n} < c$, $\exists c > 0$, ولكن $\|u^N\|_{E^n} = \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^N)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ وبالتالي

$\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^N)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < c$ وبالتالي $|\alpha_j^N| \leq \left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i^N)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < c$ أي أن $|\alpha_j^N| < c$ وذلك أي كان

$N = 1, 2, \dots$ و $j = 1, 2, \dots, n$ أي أن المتتالية العددية $\{\alpha_j^N\}_{N=1}^\infty$ محدودة في R وذلك أي كان

$j = 1, 2, \dots, n$ وحسب مبرهنة فإن هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة ولنكن $\{\alpha_j^{N_k}\}_{k=1}^\infty$

ولنكن نهاية هذه المتتالية أي أن $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_j^{N_k} = \alpha_j^0$ وبالتالي توجد في المتتالية الاختيارية

٢) $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ التي أخذناها في البداية من المجموعة M متتالية جزئية هي $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ بحيث

$u^{N_k} = \alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + \dots + \alpha_n^{N_k} u_n$ من أجل $k = 1, 2, \dots$ وهي متقاربة من العنصر :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{N_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_1^{N_k} u_1 + \alpha_2^{N_k} u_2 + \dots + \alpha_n^{N_k} u_n) =$$

$$= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_1^{N_k} \right) u_1 + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_2^{N_k} \right) u_2 + \dots + \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_n^{N_k} \right) u_n = \alpha_1^0 u_1 + \alpha_2^0 u_2 + \dots + \alpha_n^0 u_n = u^0$$

١) أي أن : $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{N_k} = u^0$ فالمتتالية $\{u^{N_k}\}_{k=1}^\infty$ متقاربة ، وبالتالي M شبه متراسة وهو المطلوب

٣) جواب السؤال الثاني (١٥ درجة) : لدينا $\|\lambda\| \leq \|A\|$ أي كان $\lambda \in \sigma(A)$ وبالتالي فإن $r_{\sigma(A)} \leq \|A\|$ ولما

كل $\sigma(A^*) = [\sigma(A)]^*$ وبما أن $r_{\sigma(A^*)} \leq \|A^*\|$ فإن $r_{\sigma(A)} = \sqrt[n]{r_{\sigma(A^*)}} \leq \sqrt[n]{\|A^*\|}$ وبالتالي فإن :

$$(3) \quad r_{\sigma(A)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{لدينا } \|A\| < |\lambda| \text{ وباخذ } \zeta = \frac{1}{\lambda} \text{ فإن:} \\ (A - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \\ (A - \lambda I)^{-1} = -\zeta \sum_{n=0}^{\infty} A^n \zeta^n, \quad |\zeta| < \frac{1}{\|A\|} \end{array} \right.$$

وبما أن كل متسلسلة قوى من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ لها نصف قطر تقارب r وتكون هذه المتسلسلة متقاربة

عندما $|\zeta| < r$ وإن نصف قطر التقارب هذا يحسب من العلاقة $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$ وبالتالي وبما

أن $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \zeta^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\| |\zeta|^n$ فتكون هذه السلسلة متقاربة إذا كان $|\zeta| < r$ أي أن

وبالتالي فإن التابع $h(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ تحليلي في كل نقطة $|\lambda| = \frac{1}{|\zeta|} > \frac{1}{r} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$

λ_0 من $\rho(A)$ كما أن $h\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \omega(\zeta)$ تحليلي في أي مجموعة Δ من المستوى العقدي C وبالتالي

فإن نصف قطر التقارب هو r نصف قطر أكبر قرص دائري مفتوح مركزه في المبدأ ويقع بأكمله في

Δ ويكون $\frac{1}{r}$ نصف قطر أصغر دائرة في المستوى العقدي مركزها في المبدأ وخارجها يقع بأكمله في

$$(3) \quad \rho(A) \text{ وبالتالي فإن: } r_{\sigma(A)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r_{\sigma(A)} \text{ وبالتالي } r_{\sigma(A)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \frac{1}{r}$$

جواب السؤال الثالث (١٥+١٠=٢٥ درجة):

(أ) - ليكن X فضاء خطي منظم ومتراص أي أن X شبه متراسة وبالتالي من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$

توجد لـ X شبكة ε - منتهية، لנأخذ المتتالية $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $\varepsilon_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ،

عندئذ يوجد لـ X شبكة ε_n - منتهية وهي N_{ε_n} وذلك أيًا كان $n = 1, 2, \dots$ أي أنه من أجل أي

عنصر $x \in X$ يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ ، لنضع $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}$ فنجد أن هذه

المجموعة كثيفة وقابلة للعد إذن الفضاء X فصول.

(١) المجموعة كثيفة لأن: حتى تكون المجموعة N كثيفة يجب أن تكون لصاقتها تساوي الفضاء X كله أي أن تكون كل نقطة $x \in X$ نقطة لاصقة بالمجموعة، لإثبات ذلك يجب أن نثبت أن أي كرة مفتوحة

مركزها x تتقاطع مع N وهذا واضح ، لنكن $K(x, \varepsilon_n)$ كرة مفتوحة فحسب ما سبق يوجد $y_n \in N_{\varepsilon_n}$ بحيث $\|x - y_n\| < \varepsilon_n$ وهذا يعني أن $y_n \in K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي $y_n \in N_{\varepsilon_n} \cap K(x, \varepsilon_n)$ وبالتالي $N \cap K(x, \varepsilon_n) \neq \emptyset$ وبالتالي $y_n \in N \cap K(x, \varepsilon_n)$ وهو المطلوب .

وواضح أن المجموعة N قابلة للعد لأنها اجتماع قابل للعد لمجموعات منتهية ، فهو فصول (2)

الفضاء تام لأن : لنكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية من الفضاء X هذا يعني أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث أن $n, m > n_0$ ، $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ وبما أن X متراسة فإنه توجد في المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية جزئية متقاربة من عنصر من X ولتكن $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ بحيث $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in X$ وبالتالي من أجل أي عدد k يكون : $\|x_{n_k} - x_0\| \leq \|x_{n_k} - x_k\| + \|x_k - x_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ وهذا يعني أن المتتالية الأساسية الاختيارية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من العنصر $x_0 \in X$ وبالتالي X تام ، وهو المطلوب .

(ب) - لنفرض جدلاً $\sigma(A) = \emptyset$ عندئذ $\rho(A) = C$ وحسب المبرهنة السابقة فإن المؤثر الحلل $R_\lambda(A)$ تحليلي على كل المستوي العقدي C وبالتالي نستنتج حسب التحليل العقدي أن المؤثر $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ هو تابع ثابت أي أن $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \text{const}$ وبما أن $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|R_\lambda(A)\| = 0$ فإن $R_\lambda(A) = 0$ وهذا غير صحيح كون الفضاء B يحتوي عناصر غير الصفر أي أن $B \neq \{0\}$ وبالتالي فإن الفرض الجدلي خاطئ وهو المطلوب .

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة) : لدينا $\forall x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell_2$ ، $c=1$ ، $\|Ax\|_{\ell_2} \leq c\|x\|_{\ell_2}$ ، فالمؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ محدودة ، وبما أن المؤثر $x \neq 0 \in X$ ينقل كل مجموعة محدودة M في ℓ_2 المنطلق إلى مجموعة $A_n(M)$ محدودة في فضاء منتهي البعد $(\ell_2^{(n)})$ الإيزومورفي مع C^n وحسب مبرهنة تكون هذه المجموعة $A_n(M)$ شبه متراسة إذن متتالية المؤثرات $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متراسة .

نهاية هذه المتتالية $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots) = (\xi_1, \xi_2, \dots) = x = Ix$ ومعروف أن المؤثر I غير متراس في الفضاء غير المنتهي البعد (لان تقارب المتتالية $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ من المؤثر I هو تقارب نقطي وليس بانتظام) .

• كي يكون المؤثر مؤثر إسقاط يجب أن يحقق $A^2 = A$ & $A^* = A$ وبما أن $I^2 = I$ & $I^* = I$ أي تحقق شروط مؤثر الإسقاط إذن المؤثر مؤثر إسقاط .

كي يكون مؤثر موجباً يجب تحقق $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. لدينا

$$\langle Ix, x \rangle = \langle (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots), (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \rangle_{\ell_2} =$$

$$\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2 + \dots + \xi_n \bar{\xi}_n + 0 + 0 + \dots = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2 \geq 0$$

أي أن المؤثر مؤثر موجباً أيضاً. كي يكون المؤثر إيزومتري يجب تحقق $\langle Ax, Ay \rangle_{\ell_2} = \langle x, y \rangle_{\ell_2}$ وبما أن $I = A$ نجد أن: $\langle Ix, Iy \rangle_{\ell_2} = \langle x, y \rangle_{\ell_2}$ إذن المؤثر إيزومتري.

جواب السؤال الخامس (١٠+١٥=٢٥ درجة):

(١) - بما أن A^{-1} موجود وخطي ومحدود عندئذ فإن $\lambda = 0 \notin \sigma(A)$ وبالتالي كل عدد $\lambda \in \sigma(A)$

يمكن كتابته بالشكل $\lambda = \frac{1}{\mu}$ حيث μ عدد مناسب ومغاير للصفر.

لنثبت صحة التكافؤ: $\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1})$

بفرض $\frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1}) \Leftrightarrow \left(A^{-1} - \frac{1}{\mu}I\right)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{\mu}A^{-1}(A - \mu I)\right)^{-1}$ موجود

$\Leftrightarrow (A - \mu I)^{-1}$ موجود $\Leftrightarrow \mu A(A - \mu I)^{-1} - \mu I$ موجود

على كل الفضاء B $\Leftrightarrow \mu \in \sigma(A)$ وبالتالي التكافؤ $\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1})$ صحيح

وبالتالي التكافؤ التالي صحيح $\mu \in \sigma(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma(A^{-1})$ وهو المطلوب.

(٢) - ليكن H فضاء هيلبرت و A مؤثر خطي ومحدود و $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ قاعدتين و $\langle Au_n, v_n \rangle$ عوامل فورييه لـ Au_n بالنسبة للقاعدة $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ولنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Au_n, v_m \rangle|^2 < \infty$ وحسب

مساواة بارسيفال $\|Au_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Au_n, v_m \rangle|^2$ ندعو العدد $N(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Au_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\langle Au_n, v_m \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

بنظام هيلبرت شميث للمؤثر A .

(شكل ثنائي الخطية): ليكن $L: H \times H \rightarrow C: (x, y) \mapsto L(x, y)$ ندعو L شكلاً ثنائي الخطية

إذا كان من أجل أي $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وأي $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in C$ يتحقق الشرطان:

$$1. L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$$

$$2. L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 L(x, y_1) + \mu_2 L(x, y_2)$$

و نقول عن ثنائي L الخطية محدود إذا وجد عدد $c > 0$ بحيث يكون $|L(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|$

مدرس المقرر

انتهت الإجابات

الدكتور سامح العرجة

حسب ٢٠١٨/١/١٦ م.